

Schüler begegnen der Mathematik der dritten Dimension

von Reinhard Oldenburg

Das Göttinger Schülerlabor XLAB will eine Brücke zwischen Schule und Hochschule bilden und Begeisterung für die Naturwissenschaften wecken. Dazu sollen Schüler hands-on interessante und aktuelle Anwendungsgebiete und Grundlagen der Naturwissenschaften kennen lernen. Wie auch in den Fächern Mathematik und Informatik dieser experimentelle Ansatz umgesetzt werden kann, soll hier exemplarisch anhand eines Ferienkurses zur „dritten Dimension“ dargestellt werden. Mit diesem Aufsatz sollen nicht nur die Aktivitäten des XLAB im Bereich der Mathematik publik gemacht werden, sondern es soll die Diskussion über mögliche neue Inhalte des Mathematikunterrichts, die durch die „Berliner Thesen“ [1] voran gebracht wurde, mit weiteren konkreten Beispielen angereichert werden.

Mathematik im Labor?

Wenn man die in der Didaktik seit langem vehement vertretenen Forderungen nach Realitätsbezug, Anwendungsorientierung, Modellierungsaktivitäten, und Schüleraktivität konsequent zu Ende denkt, ohne der Illusion zu verfallen, Schüler könnten ohne Anleitung alles selbst entdecken, kann man zu dem kommen, was ich „Schülerexperimente in der Mathematik“ nennen möchte. Schüler experimentieren mit realen Objekten, extrahieren mathematische Modelle und setzen diese auch, aber nicht nur, am Computer um. Im Hintergrund steht dabei die Idee, dass Mathematik etwas ist, das einen in die Lage versetzt, etwas in der Realität zu tun. Ausgangspunkt und Ziel der Aktivitäten sind deshalb real. Im Weg dazwischen tauchen auch innermathematische Fragen auf und ihre Bedeutung kann in einen größeren Bezugsrahmen gestellt werden.

Die Inhalte der 3. Dimension

Der Ferienkurs zur dritten Dimension richtete sich an Schüler und Schülerinnen ab Klassenstufe 10 und dauerte eine ganze Woche. Ziel war es, verschiedene Aspekte rund um die Bewältigung der Probleme,

die die Dreidimensionalität der Welt mit sich bringt, gemäß den Grundsätzen des XLAB kennenzulernen.

Virtuelle Welten mit POVray erstellen. Einen schönen motivierenden Einstieg ermöglicht die Modellierung von 3d-Körpern. POVray ist ein Raytracing-Programm, es stellt die Körper also nicht nur perspektivisch korrekt dar, sondern berechnet die Verteilung des Lichtes in der Szene unter Berücksichtigung der eingestellten Oberflächeneigenschaften der Körper. Zur Beschreibung der Szene müssen die Schüler sich der dreidimensionalen Koordinaten bedienen und darauf gegebenenfalls noch affine Abbildungen loslassen. Dabei kommen zwanglos Vektoren ins Spiel. Ein Beispiel für einen rotierten Torus:

```
torus { 1, 0.2
  scale 1.5
  rotate <60,30,0>
  translate<-1,1,1>
}
```

Besonders attraktiv ist die Möglichkeit, die Szenen von einem Zeitparameter abhängig zu beschreiben und so Filme zu erstellen. Dabei müssen die Schüler die Bahnen der Körper selbst parametrisieren. So wurde zum Beispiel das oben dargestellte Fahrrad in

Bewegung versetzt und gegen die Wand fahren gelassen.

Projektionen. Wie kommt man von einem 3d-Objekt zu einer perspektivischen Darstellung? Diese Frage führte über klassische experimentelle Untersuchungen des Schattenwurfs durch eine Punktlichtquelle und durch einen Autoscheinwerfer (nahezu paralleles Licht) auf die Projektionsarten und ihre Eigenschaften. An der Kante zwischen Wand und Tisch durchgeführt, kamen wir zur Konstruktion der Zentralprojektion aus Grund- und Aufriss. Diese wurde dann mit dynamischer Geometrie (ZuL) umgesetzt.

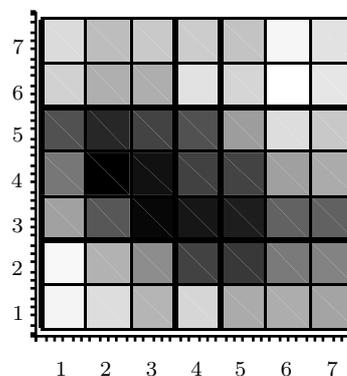
Ein paar Bilder aus der Geschichte der Malerei später wurden aus Dürers bekanntem Holzschnitt zur Zentralprojektion und einem entsprechenden realen Fadenmodell die vektorgeometrischen Projektionsformeln hergeleitet. Mit dem Computeralgebraprogramm *Maple* umgesetzt konnten so die verschiedenen im Lichtexperiment beobachteten Eigenschaften von Zentral- und Parallelprojektion beobachtet werden.

Wenn die Zentralprojektion aus der Perspektive der beiden Augen farblich unterschiedlich dargestellt wird, liefern Sterobrillen (Farbfilter) einen plastischen Eindruck.

Die Umkehrfrage ist ebenfalls naheliegend: Wie bestimmt man 3d-Koordinaten eines Objektes, wenn mehrere Photographien vorliegen? Mit den schon hergeleiteten Formeln und etwas Grübeln über überbestimmte Gleichungssysteme (interpretiert als Optimierungsproblem) kann mit *Maple* dann sehr schnell auf die 3d-Koordinaten zurückgerechnet werden. Im Experiment war die Genauigkeit bei weiter entfernten Objekten zwar nicht optimal, nahe Objekte (unter 1 m) wurden aber sehr genau lokalisiert.

Computertomographie. Die Gewinnung von 3d-Informationen aus dem Inneren von Körpern ist vor allem eine Leistung der Mathematik. Die gefährliche Physik der Röntgenstrahlung habe ich deshalb durch ungefährlichere Laserstrahlung ersetzt. Damit durchleuchten die Schüler ein halbtransparentes Objekt und messen die Absorption. Zur Rekonstruktion der Absorption in der durchleuchteten Schicht kann man Rückprojektion (wenn man auf die Filterung verzichtet, kann sie auch von Sekundarstufen-I-Schülern durchgeführt werden) oder lineare Gleichungssysteme verwenden. Da überbestimmte Gleichungssysteme schon bei der Bestimmung von 3d-Koordinaten aufgetreten sind, sind sie jetzt keine große Hürde mehr. Die Messwerte des verwendeten Aufbaus führen allerdings in der Regel zu einigen negativen Absorptionskoeffizienten, was physikalisch sinnlos ist. Aus dem Blickwinkel des Optimierungsproblems lassen sich aber Abweichungen vom Mittelwert der gesamten Probe bestrafen. Die so durch-

geführte Tikhonov-Regularisierung mit Ankerpunkt liefert schöne Ergebnisse. Die Flexibilität der *Maple*-Worksheets erlaubt den Schülern, Variationen auszuprobieren und damit ihr Verständnis zu testen. Für die Details der XLAB-Tomographie sei auf [2] verwiesen.



Tomographisches Bild einer tintenwassergefüllten, gequetschten und schräg gestellten Colaflasche

Beobachtungen und Reflexionen

Das gesamte Programm dieses Ferienkurses könnte aus konservativer Sicht als zu anspruchsvoll für die Schule eingestuft werden. Es zeigt sich aber, dass die Konkretisierung mathematischer Inhalte an der Realität die Vernetzung der Begriffe derart fördert, dass schon Schüler ab der 10. Jahrgangsstufe – wenn auch jene besonders motivierten Schüler, die sich zu einem Ferienkurs anmelden – dies leisten können. Eine ganze Reihe von mathematischen Konzepten (Vektoren, überbestimmte Gleichungssysteme, Abbildungsgeometrie) kam an mehreren Stellen vor, und so wurde aus der Denk-Ökonomie der Abstraktion auch eine Lern-Ökonomie.

Die positiven Erfahrungen, die wir am XLAB mit solchen und ähnlichen realistischen Themen gemacht haben, machen Mut, auch in Hinblick auf den regulären Unterricht in diese Richtung zu denken.

Literatur

- [1] M. Aigner et al.: Lebendige Mathematik! Berliner Thesen zum Mathematikunterricht, *DMV-Mitteilungen* 4-2003, 29–31.
- [2] R. Oldenburg: Computertomographie experimentell, ISTRON-Materialien, erscheint 2005.

Adresse des Autors

Dr. Reinhard Oldenburg
Felix-Klein-Gymnasium
Böttinger Straße 17
37073 Göttingen
roldenburg@xlab-goettingen.de